Sketch de resolução da frequência de álgebra de 2017:

Pergunta 1.

Sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + \alpha z = \beta \\ 2x + 4y + 5z = 1 \end{cases}$$

1a)

Matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & \alpha & \beta \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 - 2L_1]{L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha - 6 & \beta - 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[C_2/C_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha - 6 & 0 & \beta - 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_2/L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & \alpha - 6 & 0 & \beta - 2 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 + (\alpha - 6)L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta - \alpha + 4 \end{array}\right]$$

Chamando A à matriz dos coeficientes: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & \alpha \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \overrightarrow{\cdots} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Car(A)=2 porque após a condensação a matriz apresenta dois pivots.

Como Car(A)=2<3 (Número de variáveis) o sistema não pode ser possível e determinado

Se $\beta - \alpha + 4 = 0$ então o sistema é possível e indeterminado.

Se $\beta - \alpha + 4 \neq 0$ então o sistema é impossível.

1b)

Resolução: No caso de ser indeterminado o sistema fica após a condensação:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} x + 3z + 2y = 1 \\ -z = -1 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 3z + 2y = -2 - 2\gamma \\ z = 1 \\ y = \gamma, \gamma \in \Re \end{cases}$$

Conjunto solução : $\left\{(x, y, z) \in \Re^3 : (x, y, z) = (-2 - 2\gamma, \gamma, 1), \gamma \in \Re\right\}$

Pergunta 2

Matriz B e vector c: $B = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ \delta & -4 & 2 \end{bmatrix}; c = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

2a)

$det(B) = \det \begin{bmatrix} -4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ \delta & -4 & 2 \end{bmatrix} = (-4)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} + 5(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ \delta & 2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ \delta & -4 \end{vmatrix} =$
$= (-4) * (4 + 32) - 5 * (4 - 8\delta) + 2 * (-8 - 2\delta) = -144 - 20 + 40\delta - 16 - 4\delta = -180 + 36\delta$

Uma matriz não singular é uma matriz que não tem inversa e, portanto, o seu determinante é zero

$-180 + 36\delta = 0 \Leftrightarrow +36\delta = 180 \Leftrightarrow \delta = \frac{180}{36} = \frac{90}{18} = \frac{45}{9} = 5$

2b)

$\delta = 0 \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ \delta & -4 & 2 \end{bmatrix}$ e $\det(B) = -180$

2bi)

Primeira linha da inversa de B,
$det(B) = -180$

$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} Adj(B) = \frac{1}{\det(B)} Cof^T(B)$

$b_{11}^{-1} = \frac{1}{\det(B)} Cof(b_{11}) = \frac{1}{-180}(-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-180}(4 + 32) = -\frac{36}{180} = -\frac{18}{90} = -\frac{9}{45} = -\frac{1}{5}$
$b_{12}^{-1} = \frac{1}{\det(B)} Cof(b_{21}) = \frac{1}{-180}(-1)^{2+1} \det \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{180}(10 + 8) = \frac{18}{180} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$

$b_{13}^{-1} = \frac{1}{\det(B)} Cof(b_{31}) = \frac{1}{-180}(-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = -\frac{1}{180}(40 - 4) = -\frac{36}{180} = -\frac{1}{5}$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \end{bmatrix}$$

2bii)

u_1 pela regra de Cramer: $u_1 = \frac{B[u_1]}{\det(B)} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \\ 4 & -4 & 2 \end{vmatrix}}{-180} = \frac{360}{-180} = -\frac{36}{18} = -2$

$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \\ 4 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 2(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 8(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 2*(12-8) - 8*(-24-20) = 2*4 - 8*(-44) = 8 + 8*(44) =$
$= 8*45 = 360$

Nota $8*45 = 8*(50-5) = 8*50 - 8*5 = 8*100/2 - 40 = 400 - 40 = 360$

Pergunta 3)

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}; v = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3a)

$Cv = \lambda v$?

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3*(-1)+0+(-1)*1 \\ 0+0+0 \\ (-1)*(-1)+0+3*1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sim, e o seu valor próprio associado é 4.

3b)

$det(C - \lambda I_3) = 0$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)((3-\lambda)^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (2-\lambda)(9 - 6\lambda + \lambda^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee (\lambda^2 - 6\lambda + 8) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = \frac{6 \pm 2}{2} \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = 2 \vee \lambda = 4$

Nota: Determinante pelo desenvolvimento pelo 2^a linha

$m.a.(\lambda = 2) = 2$

$m.a.(\lambda = 4) = 1$

3c)

$$(C - 2I_3)\, u = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3-2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3-2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 + L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Logo

$$\begin{cases} u_1 - u_3 = 0 \\ u_2 = \alpha, \alpha \in \Re \\ u_3 = \beta, \beta \in \Re \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1 = \beta \\ u_2 = \alpha, \alpha \in \Re \\ u_3 = \beta, \beta \in \Re \end{cases}$$

E(2)=$\{u \in \Re^3 : u = \beta(1,0,1) + \alpha(0,1,0); \alpha, \beta \in \Re\}$

3d)

C é ortogonalmente diagonalizável porque é uma matriz simétrica.

Precisamos de encontrar um conjunto ortonormal de vectores próprios. Sabemos que vectores associados a valores próprios distintos são ortonormais.

Assim para $\lambda = 4$ temos $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sendo $\|v\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Assim $v^* = \frac{1}{\|v\|} v = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ tem norma 1.

Para $\lambda = 2$ temos dois candidatos: $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $s = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Serão ortogonais $< u, s >= 1 * 0 + 0 * 1 + 1 * 0 = 0$, SIM

Logo

$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ com $\|u\| = \sqrt{2}$, logo $u^* = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$s = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ com $\|s\| = 1$, logo $s^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Assim:

$$C = 4 * v^* v^{*T} + 2u^* u^{*T} + 2s^* s^{*T} = 4 \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Pergunta 4.

Considermoes a matriz $A = A^T$ em que x_1 e x_2 dois vectores próprios associados aos valores próprios λ_1 e $\lambda_2 : \lambda_1 \neq \lambda_1$

Temos então que

$Ax_1 = \lambda_1 x_1$

$Ax_2 = \lambda_2 x_2$

Assim fazendo:

$$x_2^T A x_1 = \begin{cases} x_2^T (Ax_1) = x_2^T \lambda_1 x_1 = \lambda_1 x_2^T x_1 \\ \left(A^T x_2\right)^T x_1 = (\lambda_2 x_2)^T x_1 = \lambda_2 x_2^T x_1 \end{cases} \quad \text{logo:}$$

$$\lambda_1 x_2^T x_1 - \lambda_2 x_2^T x_1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\, x_2^T x_1 = 0$$

como $\lambda_1 \neq \lambda_1$ logo $x_2^T x_1 = 0$.