

Exame de Álgebra Linear

Ano letivo: 2012/2013

Sem.: 1º

Época: Normal

Data: 21/01/2013

Curso: Licenciatura em Economia

Duração: 2h 00m

A integridade académica é um valor fundamental da FEUC. O Regulamento Pedagógico da UC proíbe e sanciona as várias formas de fraude académica. Durante a realização das provas escritas é exigido que:

- Não usem materiais de consulta, máquinas calculadoras gráficas ou quaisquer outros equipamentos eletrónicos, exceto se tal for explicitamente permitido pelo responsável da unidade curricular em causa;
- Não transmitam as questões da prova a outras pessoas;
- Mantenham desligados quaisquer equipamentos de comunicação;
- Usem exclusivamente as folhas de exame fornecidas pelos vigilantes da prova.

A comprovada fraude académica determina a anulação da prova, a impossibilidade de o/a Estudante concluir a unidade curricular com aproveitamento, a comunicação ao Diretor da FEUC e, eventualmente, a comunicação ao Reitor, para aplicação de sanções disciplinares.

1. Seja M uma matriz quadrada de ordem 3 que satisfaz as seguintes condições:

i) M é simétrica;

ii) $N(M) = \{\gamma(1, 1, 1), \gamma \in \mathbb{R}\}$, sendo $N(M)$ o núcleo da matriz M ;

iii) $Mu = -3u$, onde $u = (1, 0, -1)$;

iv) $Mv = 15v$, onde $v = (1, -2, 1)$.

1. a) Indique os valores próprios da matriz M .

1. b) Determine um conjunto ortonormal constituído por três vetores próprios de M .

1. c) Construa a matriz M que satisfaz as quatro condições anteriores. (*Sugestão: tenha em conta as alíneas anteriores*)

2. Sejam $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & k_1 \\ 3 & 0 & k_2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, com $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}$.

2. a) Recorrendo à regra de Cramer, determine o valor da incógnita x_3 no sistema $Ax = b$.

2. b) Discuta para todos os valores reais de k_1 e k_2 o sistema $(A - 3I_3)y = 0$.

2. c) Determine dois elementos da terceira linha da matriz inversa da matriz A .

Faça, agora, $k_1 = k_2 = -1$.

2. d) Utilizando a eliminação de Gauss, resolva o sistema $Ax = b$.

2. e) Calcule os valores próprios da matriz A , indicando as respetivas multiplicidades algébrica e geométrica.

2. f) A matriz A é diagonalizável? Justifique.

2. g) Utilizando a definição de valor próprio e vetor próprio, prove que a matriz A e a matriz adjunta de A , $\text{adj}(A)$, têm os mesmos vetores próprios e calcule os valores próprios e o determinante da matriz $\text{adj}(A)$.

Atenção! Entregue este enunciado juntamente com a sua folha de prova.

Comece a resolver os exercícios na segunda página de prova, deixando a primeira em branco.

Cotação: Todas as alíneas valem dois valores.

Respostas sem justificação não serão consideradas.