· U C · FEUC FACULDADE DE ECONOMIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

CÁLCULO I [ECONOMIA] Teste 1, regime de Avaliação Contínua [16/novembro/2012]

PARTE I: Duração máxima: 15min. **Código: 1161112**

NOME:____**Nº:**________

A integridade académica é um valor fundamental da FEUC. O Regulamento Pedagógico da UC proíbe e sanciona as várias formas de fraude académica. **Durante a realização das provas escritas é exigido que:**

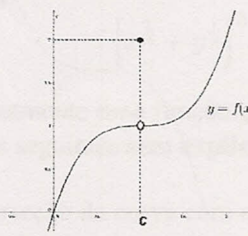
Não usem materiais de consulta, máquinas calculadoras ou quaisquer outros equipamentos eletrónicos;
Não transmitam as questões da prova a outras pessoas;
Mantenham desligados quaisquer equipamentos de comunicação;
Usem exclusivamente as folhas de exame fornecidas pelos vigilantes da prova.

A comprovada fraude académica determina a **anulação da prova**, a **impossibilidade de o/a Estudante concluir a unidade curricular com aproveitamento**, a **comunicação ao Diretor da FEUC** e, eventualmente, a **comunicação ao Reitor, para aplicação de sanções disciplinares**.

Instruções gerais:
- **a folha de enunciado (parte I) deverá ser entregue;**
- cada **resposta certa**: 0,4 valores; **4 respostas erradas: descontam 0,4 valores**;
- escolhas ilegíveis ou indicadas de modo ambíguo serão cotadas como respostas erradas.

Para cada uma das seguintes questões, escolha a opção correta **e assinale-a no espaço indicado**.

1. Considere o gráfico de uma função f:



A respeito da continuidade de f no ponto de abcissa c, podemos afirmar que f é:

(a) contínua;
(b) descontínua, porque $c \notin D_f$;
(c) descontínua, porque não existe $\lim\limits_{x\to c} f(x)$;
(d) descontínua, porque $\lim\limits_{x\to c} f(x) \neq f(c)$. **Opção:** ________

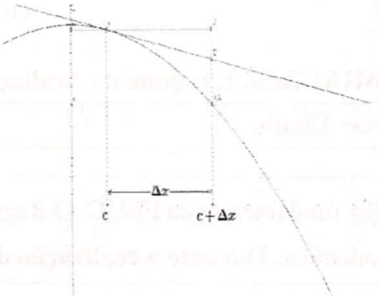
2. Para uma certa f.r.v.r. f e um ponto $c \in D_f$, sabe-se que

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(c+k) - f(c)}{k} = L,$$

onde $L \in \mathbb{R}$. Podemos afirmar que:

(a) f é contínua em c;
(b) a reta tangente ao G_f no ponto de abcissa c nunca é horizontal;
(c) $df(c) = L$;
(d) $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ pode não existir. **Opção:** ________

3. Considere o gráfico de uma função f.



Seja Δy a variação da função quando x vai de c para $c + \Delta x$ e $dy(c)$ a diferencial da função em c. Podemos afirmar que $dy(c)$ é dado por:

(a) $-\overline{DG}$;

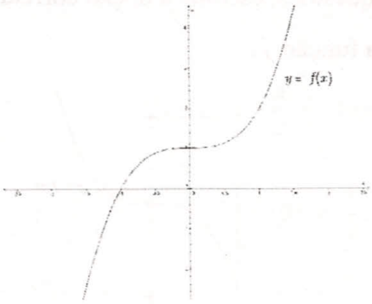
(b) $-\overline{JD}$;

(c) $\overline{JD}$;

(d) $-\overline{JG}$.

Opção: ________

4. Considere o gráfico de uma função f, contínua e duplamente diferenciável em $\mathbb{R}$.



Podemos afirmar que f' é uma função:

(a) crescente em $\mathbb{R}$;

(b) decrescente em $\mathbb{R}$;

(c) decrescente em $\mathbb{R}_0^-$ e crescente em $\mathbb{R}_0^+$;

(d) crescente em $\mathbb{R}_0^-$ e decrescente em $\mathbb{R}_0^+$.

Opção: ________

CÁLCULO I [ECONOMIA]

Teste 1, Regime de Avaliação Contínua [16/novembro/2012]

PARTE II	**Duração: 60min+15min (tolerância)**

Responda às questões de forma tão completa quanto possível, apresentando **todas as justificações** que considere relevantes. É proibido o uso de calculadoras, de telemóveis e de tabelas.

1. Considere as f.r.v.r. f e g tais que $f(x) = \arcsin x$, $x \in D_f$ e $g(x) = \ln(1+x)$, $x \in D_g$.

   (a) Indique D_f, D'_f e esboce o gráfico de f.

   (b) Seja h a f.r.v.r. tal que $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$. Determine D_h e averigue se o seu gráfico possui assímptotas.

   (c) Considere o valor de $g(0,1)$.

   i. Utilizando diferenciais, apresente uma estimativa de $g(0,1)$.

   ii. Determine o polinómio de MacLaurin de grau $n = 3$ para a função g.

   iii. Recorra à alínea anterior para apresentar uma estimativa de $g(0,1)$. Apresente o resultado sob a forma de fração.

2. Admita que uma curva no plano tem por equação

$$\left[x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right]^3 = 8$$

   e suponha que esta define implicitamente uma função $y = f(x)$ em torno do ponto P, de coordenadas $(1,1)$. Deve responder às questões seguintes **sem explicitar** $y = f(x)$.

   (a) Determine os pontos de interseção da curva com os eixos coordenados e verifique que P pertence à referida curva.

   (b) Determine uma equação da reta tangente à curva no ponto P. Esboce tal reta num referencial ortonormado.

   (c) Admita que a função f, definida implicitamente pela equação dada, é diferenciável em $\mathbb{R}^+$. Determine os intervalos de monotonia e os eventuais extremos da restrição de f a $\mathbb{R}^+$.

   (d) Supondo que f é estritamente monótona em $\mathbb{R}^+$, calcule

$$(f^{-1})'(1).$$

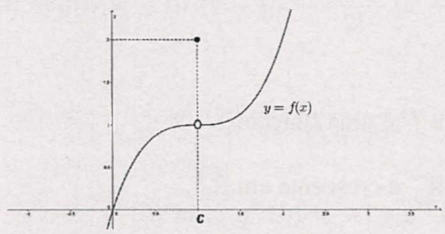
COTAÇÕES :	**1.** (a) 0,4	(b) 0,6		**2.** (a) 0,6 (b) 0,9 (c) 0,6 (d) 0,6
(Parte II)	(c) i. 0,6	ii. 0,7	iii. 0,4	

• U C • FEUC FACULDADE DE ECONOMIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

CÁLCULO I [ECONOMIA] Teste 1, regime de Avaliação Contínua [16/novembro/2012]

PARTE I: Esboço de resolução	**Código: 1161112**

1. Considere o gráfico de uma função f:



A respeito da continuidade de f no ponto de abcissa c, podemos afirmar que f é:

(d) descontínua, porque $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$.

2. Para uma certa f.r.v.r. f e um ponto $c \in D_f$, sabe-se que

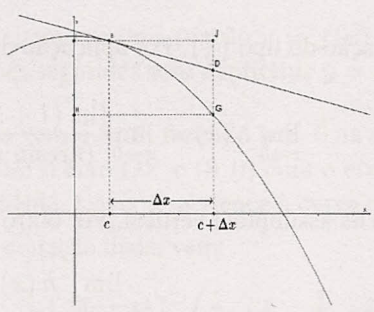
$$\lim_{k \to 0} \frac{f(c+k) - f(c)}{k} = L,$$

onde $L \in \mathbb{R}$. Podemos afirmar que:

(a) f é contínua em c;

Nota: Os dados permitem concluir que f é diferenciável em c e, por conseguinte, é contínua em c (Apontamentos Teóricos, Teorema 10, pg. 59 do Cap. 1).

3. Considere o gráfico de uma função f.

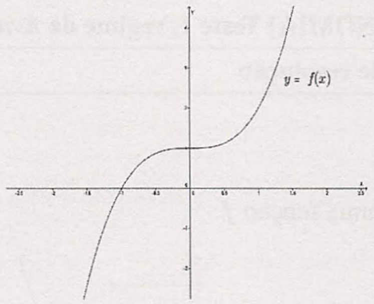


Seja Δy a variação da função quando x vai de c para $c + \Delta x$ e $dy(c)$ a diferencial da função em c. Podemos afirmar que $dy(c)$ é dado por:

(b) $-\overline{JD}$.

Nota: Compare-se com a interpretação geométrica da diferencial feita nos Apontamentos Teóricos (Cap. 1, pg. 68) ou num dos questionários teóricos.

4. Considere o gráfico de uma função f, contínua e duplamente diferenciável em $\mathbb{R}$.



Podemos afirmar que f' é uma função:

(c) decrescente em $\mathbb{R}_0^-$ e crescente em $\mathbb{R}_0^+$.

Nota: A figura permite concluir que $f''(x) \leq 0$ em $\mathbb{R}^-$ e $f''(x) \geq 0$ em $\mathbb{R}^+$. A conclusão a respeito da função f' decorre daqui.

PARTE II

1. Considere as f.r.v.r. f e g tais que $f(x) = \arcsin x$, $x \in D_f$ e $g(x) = \ln(1+x)$, $x \in D_g$.

(a) $D_f = [-1,1]$, $D'_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Esboço do gráfico de f: consultar pg. 29 do Cap. 1 dos Apontamentos Teóricos.

(b) Seja h a f.r.v.r. tal que $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$. Então

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \cap D_h \wedge f(x) \neq 0\} =]-1,0[\cup]0,1].$$

Atendendo ao domínio, o G_h apenas poderá possuir assímptotas verticais. Note que

$$\lim_{x \to 0} h(x)$$

é uma indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$. Por aplicação da Regra de L'Hôpital, temos:

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} \frac{(\ln(1+x))'}{(\arcsin x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = 1,$$

pelo que aqui não há assímptota vertical. Por outro lado,

$$\lim_{x \to -1^+} h(x) = +\infty,$$

pois

$$\lim_{x \to -1^+} \ln(1+x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \to -1^+} \arcsin x = -\frac{\pi}{2}.$$

Deste modo, G_h possui uma única assímptota vertical, de equação $x = -1$.

(c) Considere o valor de $g\left(0,1\right)$.

i. Utilizando diferenciais, temos:

$$g\left(0,1\right) \approx g\left(0\right) + dg\left(0\right) = g\left(0\right) + g'\left(0\right) \times 0,1.$$

Ora,

$$g\left(0\right) = 0 \text{ e } g'\left(0\right) = \frac{1}{1+0} = 1,$$

pelo que $g\left(0,1\right) \approx 0,1$.

ii. O polinómio de MacLaurin de grau $n = 3$ para a função g é o seguinte:

$$P_3\left(x,0\right) = g(0) + g'(0)(x-0) + \frac{g''(0)}{2!}\left(x-0\right)^2 + \frac{g'''(0)}{3!}\left(x-0\right)^3.$$

Ora,

$$g'\left(x\right) = \frac{1}{1+x},\ g''\left(x\right) = -\frac{1}{\left(1+x\right)^2} \text{ e } g'''\left(x\right) = \frac{2}{\left(1+x\right)^3},$$

pelo que

$$g'\left(0\right) = 1,\ g''\left(0\right) = -1 \text{ e } g'''\left(0\right) = 2.$$

Recordando que $g\left(0\right) = 0$, vem:

$$P_3\left(x,0\right) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

iii. Aplicando a teoria dos polinómios de Taylor/MacLaurin ao presente caso, para valores de x suficientemente próximos do centro do polinómio (que é 0, neste caso), tem-se:

$$g\left(x\right) \approx P_3\left(x,0\right) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

Para $x = 0,1$, temos:

$$g\left(0,1\right) \approx P_3\left(0,1;0\right) = 0,1 - \frac{1}{2}\left(0,1\right)^2 + \frac{1}{3}\left(0,1\right)^3 = 0,03 - \frac{1}{3}(0,03)^3 = \frac{143}{1500}.$$

2. Admita que uma curva no plano tem por equação

$$\left[x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right]^3 = 8$$

e suponha que esta define implicitamente uma função $y = f(x)$ em torno do ponto P, de coordenadas $(1,1)$. Deve responder às questões seguintes **sem explicitar** $y = f(x)$.

(a) Fazendo $x = 0$ na equação vem $y = 8$; fazendo $y = 0$ na equação vem $x = 8$. Assim, os pontos de interseção são $(0,8)$, com o eixo OY e $(8,0)$ com o eixo OX. Tomando na equação $x = 1$ e $y = 1$, obtem-se uma igualdade. Logo, P pertence à curva cuja equação é dada.

(b) Por derivação implícita da equação dada, vem:

$$3\left[x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right]^2 \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

ou seja,

$$\left[x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right]^2 \left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{y^{\frac{2}{3}}}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

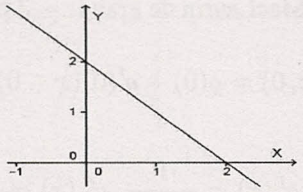
com $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Assim,

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

No ponto P, temos

$$y(1) = 1 \text{ e } \frac{dy}{dx}(1) = -1.$$

Uma equação da reta tangente à curva no ponto P é $y - 1 = -(x-1)$, que equivale a $y = -x + 2$. Para além de P, também $(0, 2)$ pertence à reta. Esboço da reta:



(c) Note que

$$\frac{dy}{dx}(x) = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \iff y = 0.$$

Ora, por (a), isto sucede apenas no ponto $(8, 0)$. Além disso, $\frac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\left(\frac{y}{x}\right)^2} \leq 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}^+$. Temos pois o seguinte quadro de monotonia de f restiringida a $\mathbb{R}^+$:

x	0	8	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$

Deste modo, tal restrição é estritamente decrescente em $\mathbb{R}^+$ e não possui extremos.

(d) Supondo que f é estritamente monótona em $\mathbb{R}^+$, tem-se

$$\left(f^{-1}\right)'(1).$$

$$\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{f'(a)},$$

onde $a = f^{-1}(1)$ e desde que $f'(a) \neq 0$. Por (a), e uma vez que nos estamos a referir à inversa da restrição de f a $\mathbb{R}^+$,

$$a = f^{-1}(1) = 1.$$

De (b), resulta:

$$f'(1) = \frac{dy}{dx}(1) = -1.$$

Logo,

$$\left(f^{-1}\right)'(1) = -1.$$