

Exame da Época Normal - Cálculo II

Ano letivo: 2012/2013

Sem.: 2º

Época: normal

Data: 3/06/2012

Curso: Licenciaturas em Economia

Duração: 2h

A integridade académica é um valor fundamental da FEUC. O Regulamento Pedagógico da UC proíbe e sanciona as várias formas de fraude académica. Durante a realização das provas escritas é exigido que:

- Não usem materiais de consulta (exceto a tabela fornecida na prova), máquinas calculadoras ou quaisquer outros equipamentos eletrónicos;
- Não transmitam as questões da prova a outras pessoas;
- Mantenham desligados quaisquer equipamentos de comunicação;
- Usem exclusivamente as folhas de exame fornecidas pelos vigilantes da prova.

A comprovada fraude académica determina a anulação da prova, a impossibilidade de o/a Estudante concluir a unidade curricular com aproveitamento, a comunicação ao Diretor da FEUC e, eventualmente, a comunicação ao Reitor, para aplicação de sanções disciplinares.

1. Considere a função real de variável real $f(x) = \frac{4}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}$, $x \in D_f$.

- Decomponha $f(x)$ em elementos simples.
- Calcule $\int f(x)dx$.
- Efetuando uma mudança de variável adequada calcule

$$\int \frac{4}{e^{3x} - e^{-x}} dx. \quad (1)$$

2. Considere a região R definida por

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ln x \leq y \leq e^{-x} \wedge 0 \leq x \leq 1\}$$

- Represente graficamente a região R_1 num sistema de eixos ortonormados.
- Determine, caso seja possível, a área definida pela região R_1 .

3. (a) Analise a natureza de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$.

(b) Determine o intervalo de convergência de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(x-2)^n}{\sqrt[3]{n}}$.

4. Considere a equação diferencial ordinária

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$$

- Resolva a equação diferencial, apresentando a solução na forma explícita.
- Determine a solução particular que satisfaz $y(1) = 8$

v.s.f.f.

5. Seja $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

- Deduza o desenvolvimento em série de MacLaurin de $g(x)$ e diga onde é válido tal desenvolvimento.
- Recorrendo à alínea anterior, obtenha a expressão de G tal que

$$G(x) = \int_0^x g(y)dy. \quad (2)$$

DAS QUESTÕES SEGUINTE RESOLVA APENAS UMA

6. Seja $h(x) = \arctgx$, $x \in D_h$.

- Deduza o desenvolvimento em série de MacLaurin de $h(x)$ indicando onde é válido esse desenvolvimento.
- Considere a seguinte igualdade inscrita num edifício da Universidade de Coimbra,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (3)$$

Justifique de que modo ela pode resultar da alínea anterior.

7. Considere a equação diferencial de ordem 3, homogénea, com coeficientes constantes

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 7\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} = 0$$

- Verifique, sem resolver a equação, se $y = e^{-x}$ é solução da equação diferencial apresentada.
- Calcule a solução geral da equação diferencial.

COTAÇÕES:

Questão 1. 4 val.

Questão 2. 3,5 val.

Questão 3. 3,5 val.

Questão 4. 3,5 val.

Questão 5. 3,5 val.

Questão 6. ou 7. 2 val.