

Resolução resumida exame Estatística (26-01-2015)

1. (a)

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{\infty} = 1,$$

dado que é uma função que assume apenas valores positivos e integra 1, é uma função de densidade de probabilidade.

(b) Função de distribuição: $F(x) = 0 \quad (x < 0)$; $F(x) = \int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x} \quad (x \geq 0)$.

$$(c) P(X > 2 | X > 1) = \frac{P(X > 2)}{P(X > 1)} = \frac{e^{-2}}{e^{-1}} = e^{-1}.$$

2. (a) Função de probabilidade marginal de Y : $f_Y(y) = \sum_{x \in D_x} f(x, y)$; $f_Y(1) = 0.4$; $f_Y(2) = 0.3$; $f_Y(3) = 0.3$.

(b) Função de probabilidade condicionada: $f_{Y|X=x} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$; $f_{Y|X=1}(1) = 1/4$, $f_{Y|X=1}(2) = 2/4$; $f_{Y|X=1}(3) = 1/4$. Assim, $E(Y|X=1) = \sum_{y=1}^3 y f_{Y|X=1}(y) = 1 \times (1/4) + 2 \times (2/4) + 3 \times (1/4) = 2$.

3. $P(|X-1| < 2) = P(-2 < X-1 < 2)$; considerando $Z = (X-1)/2 \sim N(0, 1)$, a probabilidade a calcular é $P(-1 < Z < 1) = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826$, onde $\Phi(1) = 0.8413$ (tabela lei normal).

4. (a) Função de verosimilhança:

$$L = \prod_{i=1}^n \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i} = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$$

e $\log(L) = (\sum_{i=1}^n x_i) \log(\theta) + (n - \sum_{i=1}^n x_i) \log(1-\theta)$. Calculando a primeira derivada e igualando a zero,

$$\frac{d \log(L)}{d \theta} = \frac{n\bar{x}}{\theta} - \frac{n(1-\bar{x})}{1-\theta} = 0 \Rightarrow \theta = \bar{x}.$$

Calculando a segunda derivada:

$$\frac{d^2 \log(L)}{d \theta^2} = -\frac{n\bar{x}}{\theta^2} + \frac{n(1-\bar{x})}{(1-\theta)^2},$$

avaliada em $\theta = \bar{x}$

$$\frac{d^2 \log(L)}{d \theta^2}(\theta = \bar{x}) = -\frac{n}{\bar{x}(1-\bar{x})} < 0,$$

portanto, $\hat{\theta}_{MV} = \bar{X}$.

- (b) Dado que se trata de uma população de Bernoulli, $E(X) = \theta$ e $V(X) = \theta(1-\theta)$, assim $E(\bar{X}) = \theta$, ou seja, $\bar{X}$ é um estimador não enviesado de θ , e $V(\bar{X}) = \theta(1-\theta)/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, verificando-se as condições para que o estimador seja consistente.

5. Através da razão de verossimilhanças:

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{\prod_{i=1}^5 \theta_1 e^{-\theta_1 x_i}}{\prod_{i=1}^5 \theta_0 e^{-\theta_0 x_i}} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^5 \exp\left(-(\theta_1 - \theta_0) \sum_{i=1}^5 x_i\right),$$

a estatística a usar é $\sum_{i=1}^5 X_i$, e dado que, $\theta_1 < \theta_0$, a região de rejeição assume a forma $W = \{x^{(5)} : \sum_{i=1}^5 x_i > k\}$. Apenas resta determinar k , de forma a que, $P(W|H_0) = 0.05$. Para H_0 , $\sum_{i=1}^5 X_i \sim G(5, 2)$, portanto, $4 \sum_{i=1}^5 X_i \sim \chi_{10}^2$. Tendo em conta estes resultados, recorrendo à tabela do qui-quadrado, $4k = 18.307$, portanto, $W = \{x^{(5)} : \sum_{i=1}^5 x_i > 4.57675\}$.

6.

$$\begin{aligned} E_X \left(\frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta} \right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \log f(x; \theta)}{\partial \theta} f(x; \theta) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x; \theta)/d\theta}{f(x; \theta)} f(x; \theta) dx \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{\infty} f(x; \theta) dx = \frac{\partial}{\partial \theta}(1) = 0 \end{aligned}$$