FEUC FACULDADE DE ECONOMIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Exame de Álgebra Linear

Ano letivo: 2011/2012 Sem.: 1º Época: Normal Data: 19/01/2012

Curso: Licenciatura em Economia Duração: 2h 00m

1. Seja $V=\{v\in\mathbb{R}^4 : v=\alpha(1,\ -2,\ 1,\ 0)+\beta(0,\ -1,\ 0,\ 1),\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$ o conjunto das combinações lineares dos vectores $(1,\ -2,\ 1,\ 0)$ e $(0,\ -1,\ 0,\ 1)$.

Determine um vector w, pertencente ao conjunto V, tal que $\|w\|=1$ e w é ortogonal a $(0,\ -1,\ 0,\ 1)$.

2. Considere a matriz quadrada $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 2 & 2\\ -1 & 2 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 2 & 0\end{bmatrix}$.

(a) Utilizando as propriedades dos determinantes, mostre que:

$$\det(A) = -2det\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 2 & 0\end{bmatrix} = -2\,det\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 2 & 2\\ 0 & -4 & 4 & 0\\ 0 & -1 & 3 & -2\end{bmatrix} = -4det\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 8 & 4\\ 0 & 0 & 4 & -1\end{bmatrix};$$

(b) Calcule o determinante da matriz $\frac{1}{2}A$;

(c) Classifique o sistema homogéneo $(A+2I_4)x=0$ e determine o seu conjunto solução, indicando a característica da matriz dos coeficientes, assim como as incógnitas principais e as incógnitas livres (caso existam);

(d) Determine dois elementos da terceira coluna da matriz inversa da matriz A;

(e) Verifique que $(1,\ 1,\ 1,\ 1)$ é vector próprio de A e indique o valor próprio que lhe está associado;

(f) Encontre os restantes valores próprios da matriz A;

(g) Diga, justificando, se a matriz A é diagonalizável e, em caso afirmativo, construa duas matrizes Λ e S, tal que $A=S\Lambda S^{-1}$;

(h) Faça a decomposição espectral da matriz A.

3. Suponha que $B\in\mathbb{R}^{2\times 3}$ tal que $det(BB^T)\neq 0$ e considere $C=B^T(BB^T)^{-1}B$.

Justificando cuidadosamente a sua resposta, prove que:

(a) $C=C^T$; (b) $C^2=C$; (c) $(I_3-2C)^{-1}=I_3-2C$.

Atenção! Entregue este enunciado juntamente com a sua folha de prova.

Comece a resolver os exercícios na segunda página de prova, deixando a primeira em branco.

Cotação: As questões 1 e 3, bem como cada alínea da questão 2, valem dois valores.

Respostas sem justificação não serão consideradas.