

Exame de Álgebra Linear

Ano letivo: 2011/2012

Sem.: 1ª Época: Normal

Data: 19/01/2012

Curso: Licenciatura em Economia

Duração: 2h 00m

A integridade académica é um valor fundamental da FEUC. O Regulamento Pedagógico da UC proíbe e sanciona as várias formas de fraude académica. Durante a realização das provas escritas é exigido que:

- Não usem materiais de consulta, máquinas calculadoras gráficas ou quaisquer outros equipamentos eletrónicos, exceto se tal for explicitamente permitido pelo responsável da unidade curricular em causa;
- Não transmitam as questões da prova a outras pessoas;
- Mantenham desligados quaisquer equipamentos de comunicação;
- Usem exclusivamente as folhas de exame fornecidas pelos vigilantes da prova.

A comprovada fraude académica determina a anulação da prova, a impossibilidade de o/a Estudante concluir a unidade curricular com aproveitamento, a comunicação ao Diretor da FEUC e, eventualmente, a comunicação ao Reitor, para aplicação de sanções disciplinares.

1. Seja $V = \{v \in \mathbb{R}^4 : v = \alpha(1, -2, 1, 0) + \beta(0, -1, 0, 1), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ o conjunto das combinações lineares dos vectores $(1, -2, 1, 0)$ e $(0, -1, 0, 1)$.

Determine um vector w , pertencente ao conjunto V , tal que $\|w\| = 1$ e w é ortogonal a $(0, -1, 0, 1)$.

2. Considere a matriz quadrada $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Utilizando as propriedades dos determinantes, mostre que:

$$\det(A) = -2 \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = -2 \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} = -4 \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix};$$

(b) Calcule o determinante da matriz $\frac{1}{2}A$;

(c) Classifique o sistema homogéneo $(A + 2I_4)x = 0$ e determine o seu conjunto solução, indicando a característica da matriz dos coeficientes, assim como as incógnitas principais e as incógnitas livres (caso existam);

(d) Determine dois elementos da terceira coluna da matriz inversa da matriz A ;

(e) Verifique que $(1, 1, 1, 1)$ é vector próprio de A e indique o valor próprio que lhe está associado;

(f) Encontre os restantes valores próprios da matriz A ;

(g) Diga, justificando, se a matriz A é diagonalizável e, em caso afirmativo, construa duas matrizes Λ e S , tal que $A = S\Lambda S^{-1}$;

(h) Faça a decomposição espectral da matriz A .

3. Suponha que $B \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ tal que $\det(BB^T) \neq 0$ e considere $C = B^T(BB^T)^{-1}B$.

Justificando cuidadosamente a sua resposta, prove que:

(a) $C = C^T$;

(b) $C^2 = C$;

(c) $(I_3 - 2C)^{-1} = I_3 - 2C$.

Atenção! Entregue este enunciado juntamente com a sua folha de prova.

Comece a resolver os exercícios na segunda página de prova, deixando a primeira em branco.

Cotação: As questões 1 e 3, bem como cada alínea da questão 2, valem dois valores.

Respostas sem justificação não serão consideradas.