CÁLCULO I [ECONOMIA] **[31/Janeiro/2014] Código: 3101141**

Exame da Época de Recurso **Parte I: Duração**: 20 min.

NOME:____ **Número**:____________

A integridade académica é um valor fundamental da FEUC. Supõe-se que o estudante leu o **Regulamento Pedagógico da UC** e está ciente das **sanções resultantes das várias formas de fraude académica**.

Instruções gerais:
- · a **folha de enunciado (parte I) deverá ser entregue;**
- · cada **resposta certa**: 1 valor; 5 respostas erradas: descontam 1 valor;
- · **escolhas ilegíveis ou indicadas de modo ambíguo** serão cotadas como respostas erradas;
- · é **proibido** o uso de máquina de calcular, bem como de tabelas e formulários.

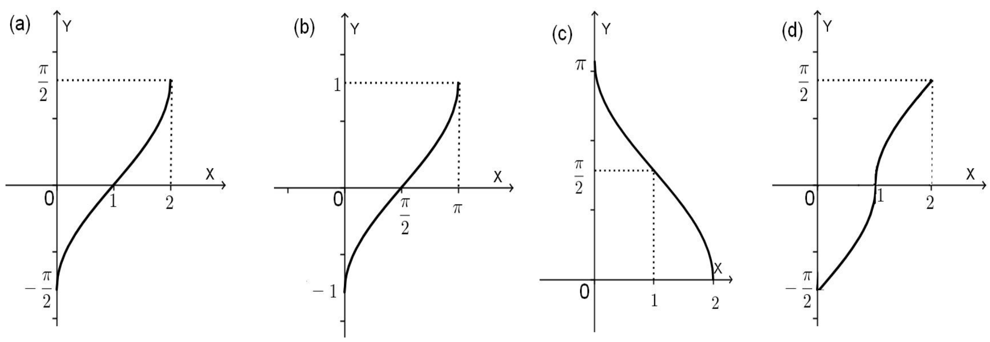
Para cada uma das seguintes questões, escolha a opção correcta **e assinale-a no espaço indicado**.

1. Considere a função real de variável real (f.r.v.r.) f tal que $f(x) = \frac{arctg(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Pode-se afirmar que D_f é dado por:

   (a) $[-1,1]$; **(b)** $[0,1[$; **(c)** $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$; **(d)** $]-1,1[$.

   Opção: ________

2. Seja g a f.r.v.r. definida por $g(x) = \arcsin(x-1)$. A sua representação gráfica é:



   Opção: ________

3. Seja h uma f.r.v.r. não constante, duplamente diferenciável em $\mathbb{R}$ e c um ponto estacionário de h. Pode-se afirmar que:

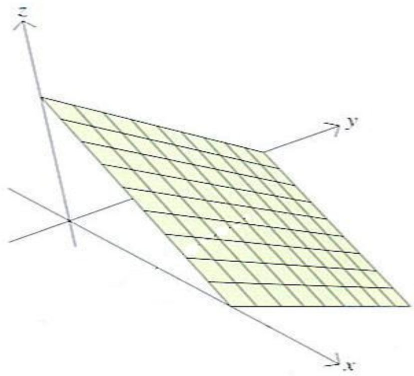
   (a) se $\frac{d^2h}{dx^2}(c) > 0$, então $h(c)$ é um mínimo local;

   (b) se $\frac{d^2h}{dx^2}(c) > 0$, então $h(c)$ é um máximo local;

   (c) se $\frac{d^2h}{dx^2}(c) = 0$, então $h(c)$ é um extremo local;

   (d) se $\frac{d^2h}{dx^2}(c) = 0$, então $h(x) - h(c)$ mantém sinal constante numa vizinhança de c. **Opção:** ________

4. O plano representado na figura é o gráfico de uma função real de duas variáveis reais, L.



Uma expressão designatória possível para definir L é:

(a) $L(x,y) = -2x - y$ **(b)** $L(x,y) = -2x - y + 2$

(c) $L(x,y) = x^2 - y + 2$ **(d)** $L(x,y) = |-2x - y + 2|$

Opção: ________

5. Admita que F e G são duas funções reais de n variáveis reais definidas em $\mathbb{R}^n$, homogéneas, de grau de homogeneidade p e q, respectivamente. Seja H a função definida por

$$H(x_1,\ldots,x_n) = \frac{F(x_1,\ldots,x_n)}{G(x_1,\ldots,x_n)}, \qquad \forall (x_1,\ldots,x_n) : G(x_1,\ldots,x_n) \neq 0.$$

Admita que todas as funções consideradas são diferenciáveis pelo menos no interior do D_H. Pode-se afirmar que:

(a) H é homogénea de grau $\frac{p}{q}$;

(b) H é homogénea de grau n;

(c) H pode não ser homogénea;

(d) $x_1 H_{x_1}(x_1,\ldots,x_n) + \ldots + x_n H_{x_n}(x_1,\ldots,x_n) = (p-q)\,H(x_1,\ldots,x_n)$. **Opção:** ________

CÁLCULO I [ECONOMIA]	**[31/Janeiro/2014]**
Exame da Época de Recurso	**Parte II: Duração**: 1h40

Responda às questões, apresentando **todas as justificações** que considere relevantes.

1. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = e^{-2x}\sin(2x)$, $x \in D_f$.

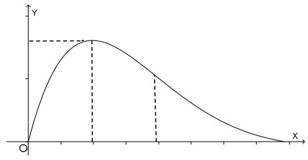
   (a) Determine D_f e também as assímptotas de f.

   (b) Determine os zeros de f e diga, justificando, se f é invertível.

   (c) Determine equações das rectas tangente e normal ao gráfico de f no ponto de abcissa $\frac{\pi}{8}$.

   (d) Mostre que $f(x)$ satisfaz a equação $y'' + 4y' + 8y = 0$, onde y representa a incógnita.

   (e) A figura seguinte representa a parte do gráfico de f com $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Justifique os intervalos de monotonia e de concavidade sugeridos pela figura. Determine ainda o máximo e o ponto de inflexão.



2. Calcule $\lim_{x\to 0} (x+1)^{\frac{\ln 5}{x}}$.

3. Considere a função real de duas variáveis reais, g, tal que $g(x,y) = 6x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$.

   (a) Determine D_g e calcule $z_0 = g(1,1)$. Determine ainda o vector $\nabla g(1,1)$.

   (b) Determine uma equação do plano tangente ao gráfico de g no ponto $(1,1,z_0)$ e indique um vector $\overrightarrow{n}$ ortogonal ao plano nesse ponto. Mostre ainda que a origem pertence a tal plano.

   (c) Determine a taxa de variação de g em $(1,1)$ (em relação à distância no plano Oxy), na direcção e sentido de $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{e_1} + 4\overrightarrow{e_2}$.

   (d) Determine o intervalo de valores possíveis para $g_{\overrightarrow{w}}(1,1)$, onde $\overrightarrow{w}$ designa um vector genérico de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Indique ainda as direcções e sentidos determinados por $\overrightarrow{w}$ para os quais se atinge o máximo e o mínimo do intervalo indicado.

   (e) Pretende-se optimizar a função g sujeita à restrição $2x + 4y = 15$.

      i. Formule o problema, à luz da teoria dos multiplicadores de Lagrange. Determine o único ponto estacionário da função lagrangiana, sujeita à restrição indicada.

      ii. Indique as condições a verificar para que g atinja um máximo sujeito à restrição dada.

Resolva **<u>um e um só</u>** dos seguintes grupos de exercícios.

4. Sabendo que F é uma função duplamente diferenciável tal que $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(u,v) = \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}(u,v) = 0$ e sendo z tal que $z(x,y) = F\left(x^2 - y^2, y^2\right)$, mostre que

$$\frac{x}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y) + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) - \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 0.$$

5. Seja f a função real de duas variáveis reais tal que $f(x,y) = e^{-|x-y|}$.

   (a) Estude a continuidade e a diferenciabilidade de f no seu domínio.

   (b) Mostre que f não possui pontos estacionários, mas atinge extremos. Identifique os extremantes, o valor do extremo e diga, justificando, se este é absoluto.

COTAÇÕES : **Parte I** **1.** 1 **2.** 1 **3.** 1 **4.** 1 **5.** 1

Parte II **1. (a)** 1.0 **(b)** 1.0 **(c)** 1.0 **(d)** 1.0 **(e)** 1.0 **2.** 1.5
3. (a) 1.0 **(b)** 1.0 **(c)** 1.0 **(d)** 1.0 **(e) i.** 1.5 **ii.** 0.5
4. 2.5 **5. (a)** 1.25 **(b)** 1.25